Ασκήσεις κατανόησης (Πραγματικοί Αριθμοί)

Απαντήσεις:

1) Δίνεται το σύνολο

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} : -3 < x \leq \sqrt{2} \}$$

i) Το A έχει μέγιστο αλλά όχι ελάχιστο
ii) Το A έχει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο
iii) Το A έχει μέγιστο και ελάχιστο
iv) Το A δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο
v) Το A έχει supremum, όχι infimum
vi) Το A έχει infimum, όχι supremum

ΛΥΣΗ

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{2}$

Εφόσον $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ το A έχει μέγιστο και ελάχιστο, όπου $\max A = 1$ και $\min A = -2$

2) Δίνονται $A, B \neq \emptyset$, φραγμένα $\subseteq \mathbb{R}$ τ.ω

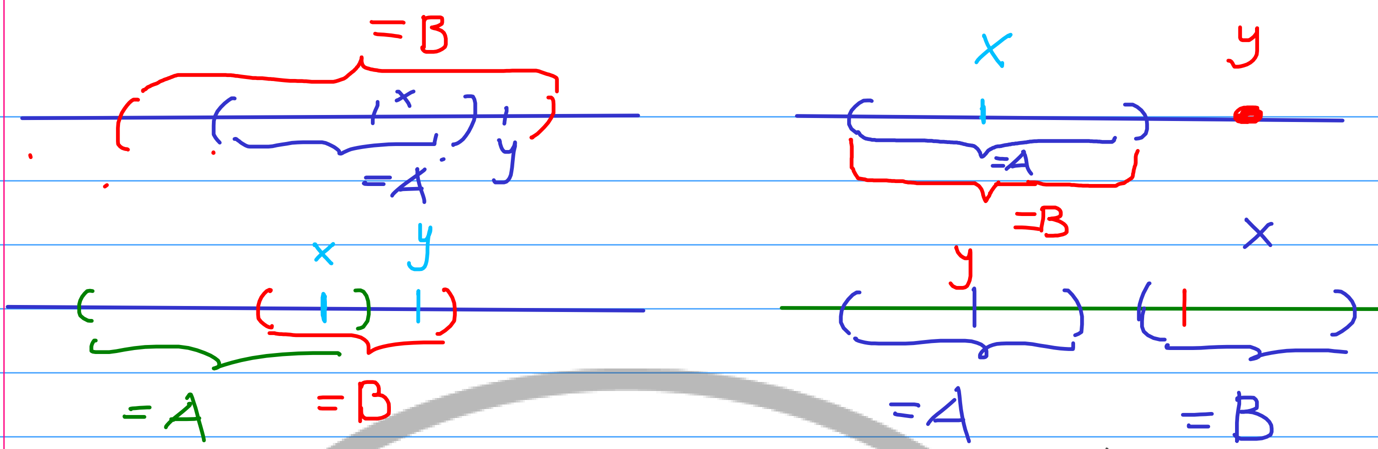
$$\text{"} \forall x \in A, \exists y \in B : x \leq y \text{"}$$

Τότε:

i) $\sup A \leq \sup B$
ii) $\inf A \leq \inf B$
iii) $\sup A \leq \inf B$
iv) $\inf B \leq \sup B$.

ΛΥΣΗ

ΠΙΘΑΝΕΣ ΣΧΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (msc)

i) Σωστό.

ΘΔο $\sup A \leq \sup B$ ή $\forall x \in A : x \leq \sup B$

Έστω $x \in A$. Τότε από την υπόθεση

$$\left.\begin{aligned} &\text{υπάρχει } y \in B : x \leq y \\ &\text{Όμως } y \leq \sup B \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \leq \sup B.$$

ii) Λάθος, αν $A = (0,1)$ και $B = (-1,2)$, τότε $\forall x \in A$ $\exists y \in [1,2) \subseteq B$ τ/ω $x \leq y$, όμως $\inf A = 0 > \inf B = -1$

iii) Λάθος, αν $A = (0,2)$ και $B = (1,3)$, τότε $\forall x \in A$ $\exists y \in [2,3) \subseteq B$ τ/ω $x \leq y$

όμως, $\sup A = 2 > \inf B = 1$

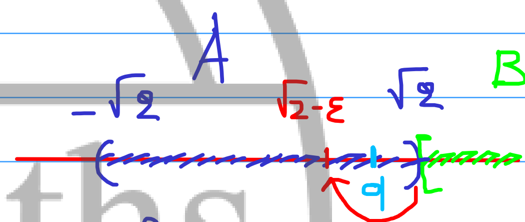
iv) Σωστό, γιατί πάντα για οποιοδήποτε $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ και φραγμένο ισχύει:

$$\inf B \leq \sup B.$$

3) Δίνονται τα σύνολα

$A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{2}\}$ και

$B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq x\}$



Τότε,

i) Υπάρχουν τα $\sup A$ και $\inf B$ και ισχύει $\sup A = \inf B$

ii) Το B έχει ελάχιστο το $\sqrt{2}$

iii) Το A έχει μέγιστο το $\sqrt{2}$

iv) Το A έχει ελάχιστο το $-\sqrt{2}$.

ΛΥΣΗ

i) Σωστό. Πράγματι, A αφ απ' το $\sqrt{2}$ και μη κενό. B κ.φ απ' το $\sqrt{2}$ και μη κενό. Άρα, από το Αξ.-πληρότ.
$\exists \sup A$ και $\inf B \in \mathbb{R}$

Μάλιστα, $\sup A = \inf B \doteq \sqrt{2}$

Αρχικά, $\sqrt{2}$ αφ του A ενώ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in A : \sqrt{2} - \varepsilon < q$, γιατί μεταξύ των $\sqrt{2}$ και $\sqrt{2} - \varepsilon$ υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα ρητός αριθμός (πυκνότητα ρητών).

Εντελώς ανάλογα $\inf B = \sqrt{2}$, γιατί είναι αρχικά κφ του B, και $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τ.ω $r < \sqrt{2} + \varepsilon$ (πυκνότητα αρρήτων)

ii) Σωστό, $\sqrt{2} = \min B$ γιατί $\sqrt{2}$ κφ του B και επίσης $\sqrt{2} \in B$ ως άρρητος αριθμός.

iii-iv) Λάθος, $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2} \notin A$, και άρα δεν γίνεται να είναι μέγιστο και ελάχιστο του A, αντίστοιχα.

4) Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \le x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \le x\}.$$

Τότε

(i) A είναι φραγμένο υποσύνολο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

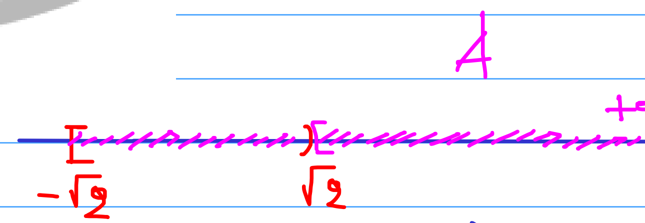
(ii) ο αριθμός $-\sqrt{2}$ είναι infimum του A.

(iii) το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

(iv) $\sqrt{2} \in A$.

(v) $-\sqrt{2} \in A$.

ΛΥΣΗ



i) Το A προφανώς δεν είναι φραγμένο διότι δεν είναι άνω φραγμένο

ii) Σωστό (όπως και στην προηγούμενη)

iii) Σωστό, το $-\sqrt{2} \in A$ και είναι κφ αυτού

Συνεπώς, $\min A = -\sqrt{2}$

iv) Προφανώς $\sqrt{2} \notin A$ γιατί $\sqrt{2}$ άρρητος και $\sqrt{2} \notin \{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : -\sqrt{2} \le x < \sqrt{2}\}$ και $\sqrt{2} \notin \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \le x\}$.

v) $-\sqrt{2} \in A$ (απαντήθηκε προηγουμένως)

5) Δίνονται A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το εξής $\forall x \in A$, $\forall y \in B$ ισχύει $x < y$. Τότε

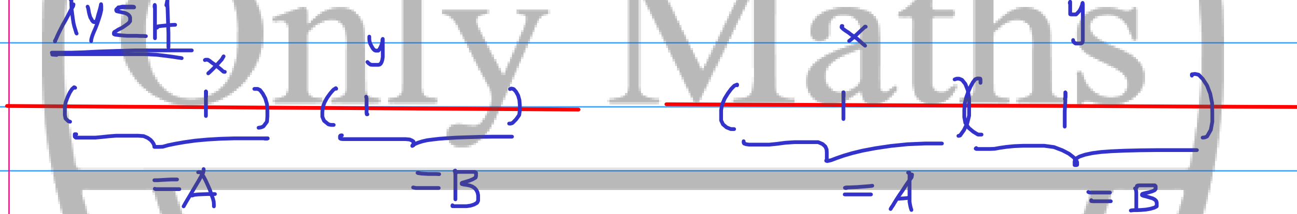
(i) $\inf B \le \sup A$.

(ii) $\sup A \le \inf B$.

(iii) $\inf A \le \inf B$.

(iv) υπάρχει $\epsilon > 0$, ώστε $\sup A < \inf B - \epsilon$.

ΛΥΣΗ



i) λάθος, αν $A = (0,1)$ και $B = (2,3)$ τότε $\inf B = 2 > 1 = \sup A$

ii) Σωστό. Θδο $\sup A \le \inf B$

Εφόσον $\forall x \in A, \forall y \in B : x < y$, σταθεροποιώντας το $y \in B$, αυτό σημαίνει ότι το y αφ του A και άρα $\sup A \le y$. Αφήνοντας τώρα το y να μεταβάλλεται στο B, η προηγούμενη ανισότητα δηλώνει ότι το $\sup A$ είναι κφ του B. Άρα, $\sup A \le \inf B$.

iii) Σωστό. Θδο $\inf A \le \inf B$ ή ισοδύναμα Θδο το $\inf A$ είναι κφ του B

δεικ. ότι $\forall\, y \in B$: $\inf A \le y$

Έστω $y \in B$

Γενικά, $\forall\, x \in A$ ισχύει:

$\inf A \le x$, ενώ απ' την υπόθεση

$x < y$. Μεταβατικά λοιπόν

$\inf A < y$ και προκύπτει το ζητούμενο

iv) Λάθος. Αν $A = (0,1)$ και

$B = (1,2)$, τότε $\sup A = \inf B = 1$

Άρα, $\nexists\, \varepsilon > 0$ τ/ω: $\underbrace{\sup A}_{1} < \underbrace{\inf B - \varepsilon}_{1-\varepsilon}$

6) Για το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Z} : -7 < x \le \sqrt{2}\}$, ισχύει

(i) $\inf A = -7$.

(ii) Το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

(iii) Το A έχει μέγιστο στοιχείο.

(iv) Το A δεν έχει supremum.

ΛΥΣΗ

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : -7 < x \le \sqrt{2}\} = \{-6, -5, \ldots, 0, 1\}$$

i) Λάθος. Είναι $\inf A = -6 = \min A$

ii) Σωστό. Απαντήθηκε στο (i)

iii) Σωστό. Είναι $\max A = 1$

iv) Λάθος. Είναι $\sup A = \max A = 1$.